Introdução aos Sinais

Pedro M. Q. Aguiar, Luís M. B. Almeida

Setembro, 2012

1 Conceito de sinal

Um sinal representa a variação de uma grandeza como função de uma variável independente, que designaremos frequentemente por *tempo*. Distinguiremos os casos de *tempo contínuo*, em que a variável independente é real, e *tempo discreto*, em que a variável independente é inteira. Usaremos letras diferentes para designar as variáveis de tempo contínuo, por exemplo t ou τ, e de tempo discreto, por exemplo n ou k.

Os sinais que se utilizam na prática tomam, em geral, valores reais. No entanto, o estudo que vamos fazer torna-se mais simples se se considerarem sinais complexos. Por esse motivo, ao longo da disciplina, iremos, em geral, considerar sinais complexos, sendo os sinais reais um caso particular destes. Um sinal de tempo contínuo é então representado por uma função $x : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ que faz corresponder a cada instante de tempo $t \in \mathbb{R}$ um valor $x(t) \in \mathbb{C}$. Da mesma forma, um sinal de tempo discreto é representado por uma função $x : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{C}$ que faz corresponder a cada instante de tempo $n \in \mathbb{Z}$ um valor $x(n) \in \mathbb{C}$. Por simplicidade, e sempre que isto não origine ambiguidade de interpretação, deixamos que as letras que designam a variável independente indiquem o tipo de sinal a que nos referimos, *i.e.*, referimo-nos frequentemente a um sinal de tempo contínuo por $x(t)$ e a um sinal de tempo discreto por $x(n)$. De realçar ainda que a designação correcta dum sinal seria da forma x e não $x(t)$. Esta última notação designa o valor do sinal x no instante t e não o sinal como um todo. No entanto é vulgar designar-se o sinal como um todo por $x(t)$, o que é um pequeno abuso de notação.

Por analogia com casos em que os sinais designam grandezas físicas, chamamos potência instantânea de um sinal a $|x(t)|^2$ (ou $|x(n)|^2$). A energia total de um sinal é então definida como o integral (ou a soma) da sua potência instantânea:

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt \, , \qquad E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 \, .$$

Podemos também definir a potência média de um sinal:

$$P_\infty = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, dt \, , \qquad P_\infty = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2 \, .$$

Estas definições permitem classificar cada sinal como pertencendo a uma das seguintes classes:

- Energia total finita, *i.e.*, $E_\infty < \infty$. Por exemplo, o sinal
$$x(n) = \begin{cases} 2 & \text{se } n = -1, 4, 5 \\ 0 & \text{outros } n \, , \end{cases}$$
para o qual $E_\infty = 12$.
- Energia total infinita mas potência média finita, *i.e.*, $E_\infty = \infty, P_\infty < \infty$. Por exemplo, o sinal $x(t) = 4$, para o qual $E_\infty = +\infty$ e $P_\infty = 16$.
- Potência média infinita *i.e.*, $P_\infty = \infty$. Por exemplo, o sinal $x(n) = 3n - 4$.

É fácil constatar que qualquer sinal de energia total finita tem potência média nula: $E_\infty < \infty \Rightarrow P_\infty = 0$.

2 Transformações da variável independente

Vamos frequentemente lidar com sinais que são obtidos a partir de outros através de uma transformação simples da variável independente. Uma primeira transformação deste tipo é o *deslocamento no tempo*, que corresponde a obter um sinal $y(t)$ a partir de $x(t)$ através de $y(t) = x(t - t_0)$. Quando $t_0 > 0$, diz-se que esta transformação é um atraso no tempo (a Figura 1 mostra um exemplo); para $t_0 < 0$, $y(t)$ diz-se uma versão avançada de $x(t)$. As mesmas definições se usam para o deslocamento de um sinal de tempo discreto, $y(n) = x(n - n_0)$, onde, naturalmente, n_0 é inteiro.

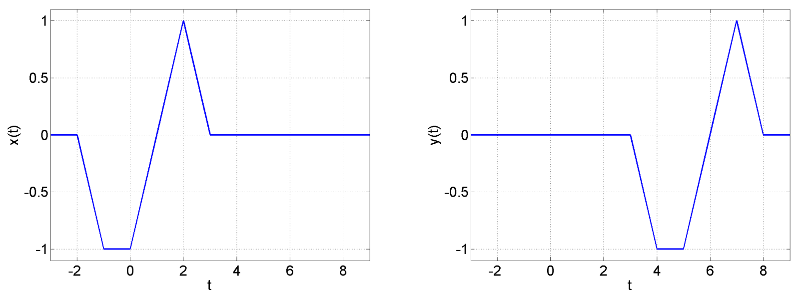

Figura 1: Exemplo de deslocamento no tempo: $y(t) = x(t - 5)$ (atraso).

Outra transformação elementar é a *inversão no tempo*, correspondendo a $y(t) = x(-t)$ ou $y(n) = x(-n)$, como ilustrado na Figura 2.

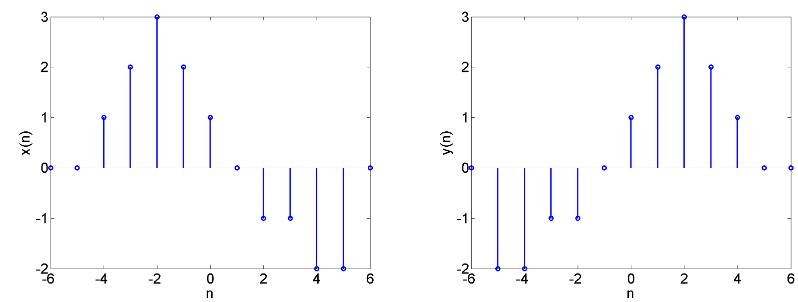

Figura 2: Exemplo de inversão no tempo: $y(n) = x(-n)$.

A última transformação simples da variável independente dá origem ao *escalamento no tempo*, correspondendo a $y(t) = x(at)$, onde $a > 0$. Para $0 < a < 1$, obtém-se uma dilatação no tempo (situação ilustrada na Figura 3); para $a > 1$, obtém-se uma compressão no tempo. Para sinais de tempo discreto, o escalamento definido por $y(n) = x(an)$ exige naturalmente que $an \in \mathbb{Z}, \forall_n$, ou seja, exige-se que a seja um inteiro positivo, originando um compressão no tempo (situação ilustrada na Figura 4). Note-se que neste caso há perda de informação, *i.e.*, o sinal $y(n)$ não representa toda a informação contida no sinal $x(n)$ (no exemplo da Figura 4, é impossível determinar $x(n)$ para n ímpar a partir da observação de $y(n)$). É também por esta razão que não é possível definir a dilatação de um sinal de tempo discreto de forma tão simples como para tempo contínuo.

Naturalmente, as transformações podem ser compostas. Assim, lidamos frequentemente com transformações do tipo $y(t) = x(\alpha t + \beta)$, onde $\alpha \neq 0$. É fácil constatar que estas transformações preservam a forma do sinal, *i.e.*, que o gráfico de $y(t)$ tem a mesma forma do de $x(t)$, diferindo apenas numa inversão, caso $\alpha < 0$, um escalamento e um deslocamento (a Figura 5 mostra um exemplo). Note-se que $y(t)$ pode ser obtido a

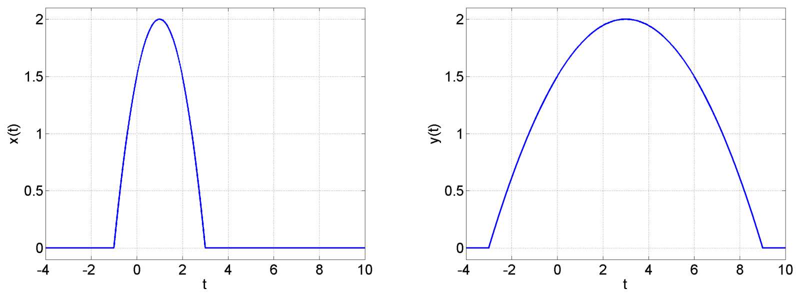

Figura 3: Exemplo de escalamento no tempo: $y(t) = x(t/3)$ (dilatação).

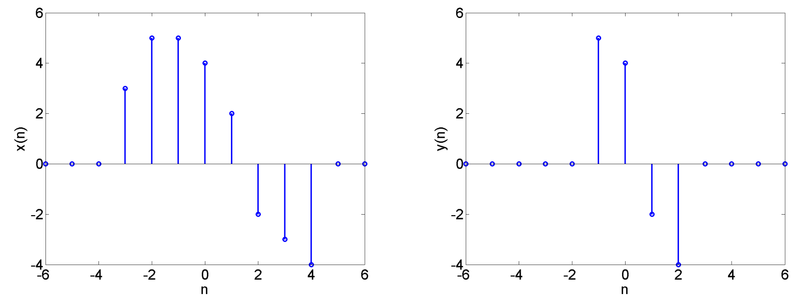

Figura 4: Exemplo de escalamento no tempo: $y(n) = x(2n)$ (compressão).

partir de $x(t)$ através da sequência de transformações: i) $z(t) = x(t + \beta)$ (z é um deslocamento de x); ii) $y(t) = z(\alpha t)$ (y é um escalamento de z, incluindo inversão se $\alpha < 0$). As transformações podem também ser compostas por ordem inversa, mas facilmente se pode constatar que a composição não é comutativa. Em particular, o leitor verificará que se pode obter $y(t)$ a partir de $x(t)$ efectuando primeiro um escalamento e depois um deslocamento mas, neste caso, o deslocamento tem um valor diferente do referido acima.

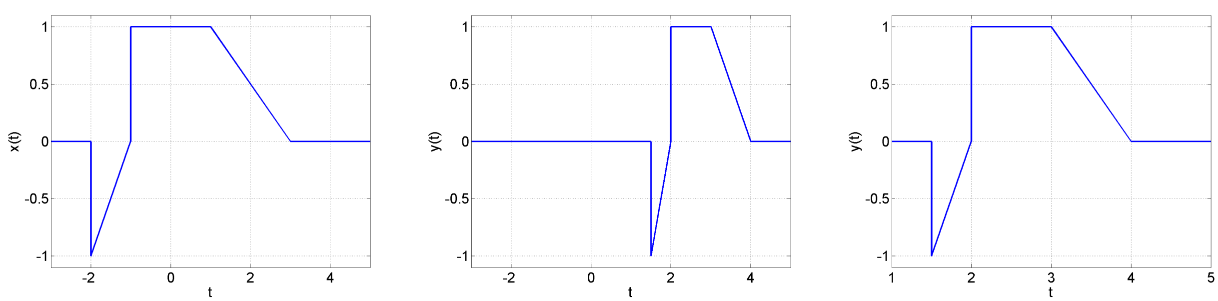

Figura 5: Exemplo de tranformação de variável independente: $y(t) = x(2t - 5)$. No lado esquerdo, o gráfico de um sinal $x(t)$; ao centro, o gráfico de $y(t)$ representado usando a mesma escala que no de $x(t)$; no lado direito, o gráfico de $y(t)$ obtido por simples re-etiquetagem do eixo dos tempos do gráfico de $x(t)$.

A composição de transformações elementares de sinais de tempo discreto dá origem a transformações do tipo $y(n) = x(\alpha n + \beta)$, onde α e β são inteiros (com $\alpha \neq 0$), que têm a mesma interpretação que a acabada de referir para os sinais de tempo contínuo, agora com a ressalva acima feita no que diz respeito à compressão no tempo discreto.

3 Sinais pares, ímpares, hermiteanos e anti-hermiteanos

Definiremos agora algumas propriedades de simetria que se usam de forma indistinta para sinais de tempo contínuo e de tempo discreto.

Um sinal $x(t)$ diz-se *par* quando é igual ao seu inverso no tempo, *i.e.*, quando

$$x(t) = x(-t)\,.$$

Nesta expressão, $x(t)$ designa o sinal x, tal como se clarificou nos parágrafos iniciais deste texto. Assim, um sinal é par se a igualdade acima se verificar para todo o instante t. Naturalmente, o gráfico de um sinal par é simétrico em relação ao eixo das ordenadas (a parte central da Figura 6 mostra um exemplo).

Um sinal $x(t)$ diz-se *ímpar* quando é o simétrico do seu inverso no tempo, *i.e.*, quando

$$x(t) = -x(-t)\,.$$

O gráfico de um sinal ímpar exibe simetria em relação à origem (a parte direita da Figura 6 mostra um exemplo). Fazendo $t = 0$ na condição acima, é fácil verificar que qualquer sinal ímpar obedece a $x(0) = 0$.

Qualquer sinal $x(t)$ se pode decompor na soma de um sinal par $x_e(t)$ com um sinal ímpar $x_o(t)$.[1] Estes sinais, a que chamamos, respectivamente, a *parte par* do sinal $x(t)$ e a *parte ímpar* do sinal $x(t)$, são obtidos a partir de $x(t)$ através das expressões

$$x_e(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) + x(-t)\right]\,, \qquad x_o(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) - x(-t)\right]\,.$$

É imediato que $x(t) = x_e(t) + x_o(t)$ e o leitor facilmente verificará que $x_e(t)$ é de facto par e $x_o(t)$ é de facto ímpar. A Figura 6 ilustra esta decomposição.

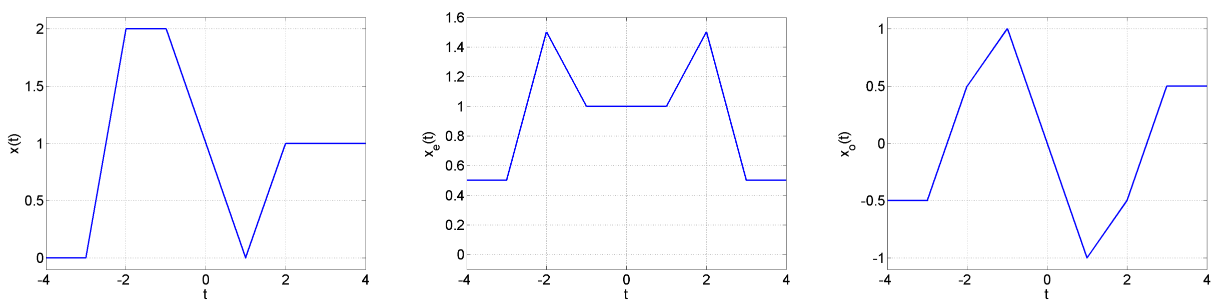

Figura 6: No lado esquerdo, o gráfico de um sinal $x(t)$; ao centro, o gráfico de $x_e(t)$, a parte par de $x(t)$; no lado direito, o gráfico de $x_o(t)$, a parte ímpar de $x(t)$.

Um sinal $x(t)$ diz-se *hermiteano* quando é igual ao conjugado do seu inverso no tempo, *i.e.*, quando

$$x(t) = x^*(-t)\,.$$

Daqui resulta imediatamente que, se $x(t)$ é hermiteano, então $|x(t)|$ e $\mathrm{Re}[x(t)]$ são sinais pares e $\arg x(t)$ e $\mathrm{Im}[x(t)]$ são ímpares.[2]

[1] Os índices "e" e "o" indicam, respectivamente, "even" e "odd", na literatura anglo-saxónica. Usam-se aqui para compatibilidade com o livro da disciplina.

[2] De facto $\arg x(t)$ só é definido, para cada valor de t, a menos de um múltiplo de 2π. Portanto, mais correctamente, $\arg x(t)$ é ímpar a menos de múltiplos de 2π independentes para diferentes valores de t.

Um sinal $x(t)$ diz-se *anti-hermiteano* quando é igual ao simétrico do conjugado do seu inverso no tempo, *i.e.*, quando

$$x(t) = -x^*(-t)\,.$$

O leitor poderá verificar que, se $x(t)$ é anti-hermiteano, então $|x(t)|$ e $\mathrm{Im}[x(t)]$ são sinais pares, $\mathrm{Re}[x(t)]$ é ímpar, mas $\arg x(t)$ não é par nem ímpar (é um sinal ímpar somado a uma constante de valor $\pi/2$, a menos de múltiplos de 2π).

Qualquer sinal $x(t)$ se pode decompor na soma de um sinal hermiteano $x_h(t)$ com um sinal anti-hermiteano $x_{\bar{h}}(t)$. Estes sinais, a que chamamos, respectivamente, a *parte hermiteana* do sinal $x(t)$ e a *parte anti-hermiteana* do sinal $x(t)$, são obtidos a partir de $x(t)$ através das expressões

$$x_h(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) + x^*(-t)\right]\,, \qquad x_{\bar{h}}(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) - x^*(-t)\right]\,.$$

É imediato que $x(t) = x_h(t) + x_{\bar{h}}(t)$ e o leitor facilmente verificará não só que $x_h(t)$ é hermiteano e $x_{\bar{h}}(t)$ anti-hermiteano, mas também que $\mathrm{Re}[x_h(t)]$ e $\mathrm{Re}[x_{\bar{h}}(t)]$ coincidem, respectivamente, com as partes par e ímpar de $\mathrm{Re}[x(t)]$ e que $\mathrm{Im}[x_h(t)]$ e $\mathrm{Im}[x_{\bar{h}}(t)]$ coincidem, respectivamente, com as partes ímpar e par de $\mathrm{Im}[x(t)]$.

Como se referiu no início desta secção, estas definições e decomposições são igualmente aplicáveis a sinais de tempo discreto, sendo nesse caso habitual usar as expressões acima com n no lugar de t. A Figura 7 ilustra a decomposição de um sinal de tempo discreto nas suas partes hermiteana e anti-hermiteana.

4 Sinais periódicos

Um sinal de tempo contínuo $x(t)$ diz-se *periódico* se existir um T positivo tal que $x(t)$ coincide com o seu deslocamento de T no tempo, *i.e.*, se

$$x(t) = x(t+T)$$

(mais uma vez se relembra que a igualdade se tem de verificar para qualquer instante t). Neste caso, diz-se que T é período do sinal $x(t)$. Na Figura 8 está representado um exemplo de sinal periódico. Pode-se constatar que quando a igualdade acima é válida para algum valor de T, existe um número infinito de períodos, já que se tem obrigatoriamente $x(t) = x(t+kT)$, com k inteiro. Chamamos *período fundamental* T_0 do sinal periódico $x(t)$ ao menor valor positivo de T que torna verdadeira a igualdade acima. Repare que qualquer sinal constante é periódico (a igualdade acima é trivialmente verificada) mas não tem período fundamental definido (como qualquer período T serve, não existe mínimo positivo).

Um sinal periódico que usaremos frequentemente é o sinusoidal:

$$x(t) = \sin(\omega t)\,,$$

onde $\omega > 0$ é a frequência angular. É fácil verificar que este sinal é periódico, com período fundamental $T_0 = 2\pi/\omega$. De facto, o sinal $x(t)$ oscila ao longo do tempo e quanto maior é ω, maior a rapidez de oscilação. A Figura 9 mostra um exemplo.

A periodicidade de sinais de tempo discreto é definida de forma idêntica mas requerendo, naturalmente, que o período N que verifica

$$x(n) = x(n+N)$$

seja inteiro (para além de positivo). Deste modo, em tempo discreto, qualquer sinal constante tem período fundamental $N_0 = 1$.

O sinal sinusoidal de tempo discreto é dado por

$$x(n) = \sin(\omega n)\,.$$

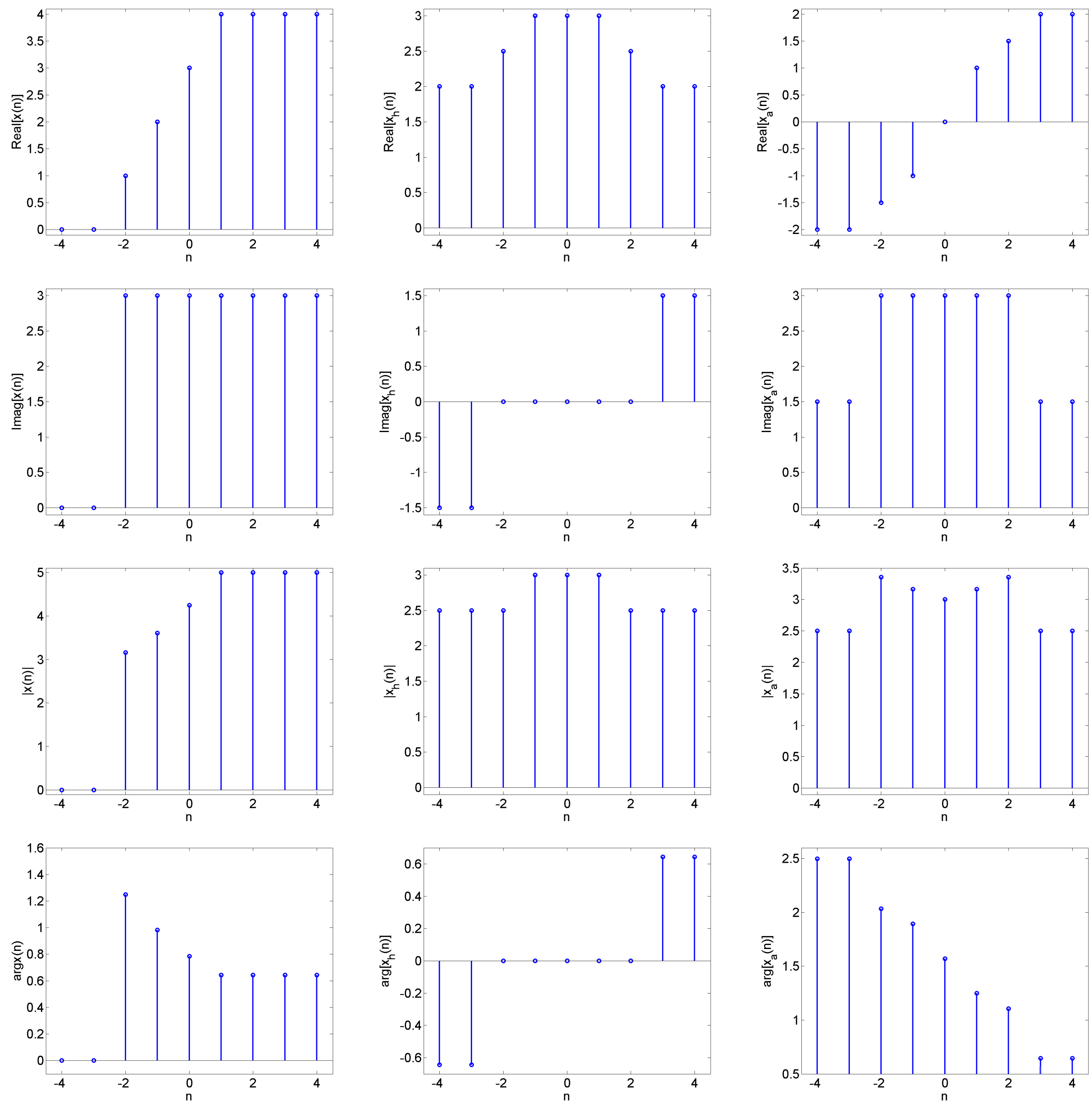

Figura 7: No lado esquerdo, os gráficos da parte real, parte imaginária, módulo e argumento de um sinal $x(n)$; ao centro, os gráficos correspondentes de $x_h(h)$, a parte hermiteana de $x(t)$; no lado direito, os de $x_{\bar{h}}(n)$, a parte anti-hermiteana de $x(n)$.

Embora este sinal seja definido por amostragem de $\sin(\omega t)$, *i.e.*, pelos valores que esta sinusóide toma para t inteiro, há distinções relevantes face ao que se disse para o sinal sinusoidal de tempo conínuo. Em primeiro lugar, a rapidez de oscilação de $x(n)$ não aumenta monotonicamente com o aumento da frequência angular ω. Em particular, é trivial constatar que diferentes frequências angulares podem dar origem ao mesmo sinal sinusoidal de tempo discreto, já que o sinal de frequência angular ω é exactamente o mesmo que os de frequências angulares $\omega + 2\pi, \omega + 4\pi, \omega + 6\pi, \ldots$. Assim, para contemplar todos os possíveis sinais sinusoidais de tempo discreto, basta-nos considerar um intervalo de frequências angulares de dimensão 2π, por exemplo, $\omega \in [0, 2\pi[$. O que acontece quanto ω percorre este intervalo é que a rapidez de oscilação de $x(n)$ começa

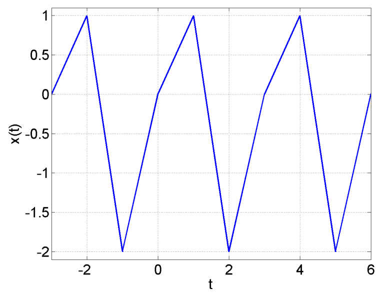

Figura 8: Gráfico de um sinal periódico. Os valores do período são $T = 3, 6, 9, \ldots$; o período fundamental é $T_0 = 3$.

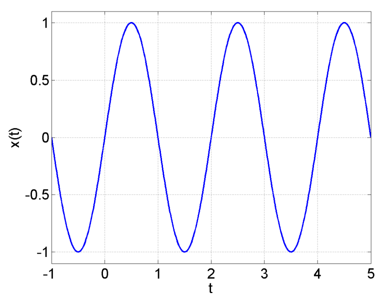

Figura 9: Gráfico do sinal sinusoidal $x(t) = \sin(\pi t)$. O período fundamental é $T_0 = 2$.

por aumentar, enquanto ω vai de 0 a π, diminuindo em seguida, enquanto ω vai de π a 2π. Outra distinção relevante é que o sinal sinusoidal de tempo discreto nem sempre é periódico. De facto,

$$x(n) = x(n+N) \quad \Leftrightarrow \quad \sin(\omega n) = \sin(\omega n + \omega N)\,.$$

Mas esta igualdade só é verificada para qualquer n caso exista um inteiro N tal que ωN seja múltiplo de 2π. Neste caso, $x(n)$ é periódico, com período fundamental

$$N_0 = \text{menor múltiplo inteiro de } \frac{2\pi}{\omega}\,.$$

Na Figura 10 estão representados um exemplo de sinal sinusoidal periódico e outro de um não periódico.

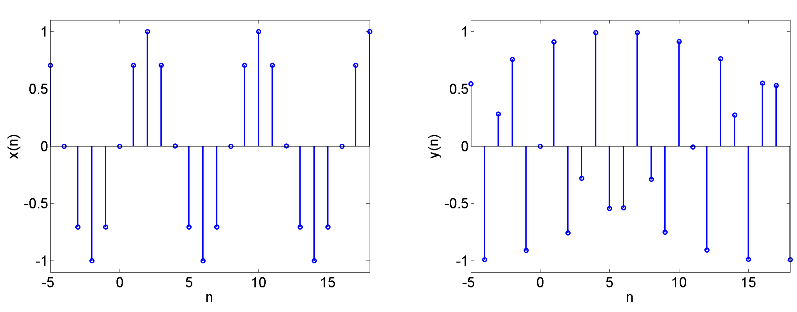

Figura 10: No lado esquerdo, o gráfico do sinal sinusoidal $x(n) = \sin(\pi n/4)$, que é periódico, de período fundamental $N_0 = 8$. No lado direito, o gráfico do sinal sinusoidal $y(n) = \sin(2n)$, que não é periódico.

5 Sinal exponencial de tempo contínuo

O sinal exponencial real de tempo contínuo é

$$x(t) = e^{rt}\,,$$

onde $r \in \mathbb{R}$. Naturalmente, $x(t)$ é um sinal real, monotonicamente crescente se $r > 0$ e monotonicamente decrescente se $r < 0$ (e, obviamente, a contante $x(t) = 1$, caso $r = 0$). A Figura 11 mostra exemplos destes sinais.

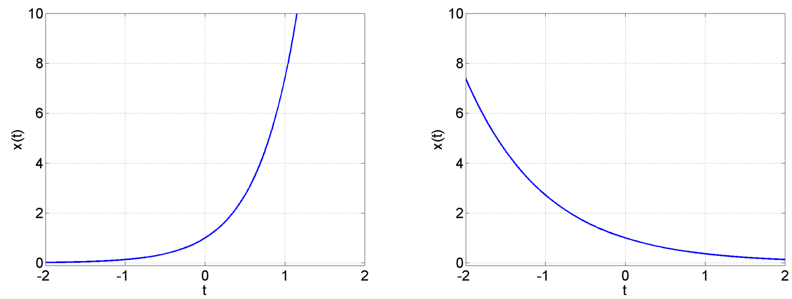

Figura 11: Sinais exponenciais reais. No lado esquerdo, o gráfico do sinal $x(t) = e^{2t}$. No lado direito, o de $x(t) = e^{-t}$.

Uma classe de sinais exponenciais complexos com que lidaremos em detalhe é obtida no caso de o expoente ser imagiário puro, *i.e.*,

$$x(t) = e^{j\omega t}\,,$$

onde $\omega \in \mathbb{R}$. Esta expressão representa directamente o complexo $x(t)$ na forma polar ($x = |x|e^{j \arg x}$), pelo que se infere imediatamente que o módulo do sinal é constante, $|x(t)| = 1$, e o seu argumento varia linearmente no tempo, $\arg x(t) = \omega t$ (módulo 2π). Em suma, se representado no plano complexo, o ponto $x(t)$ percorre interminavelmente a circunferência de raio unitário centrada na origem, com rapidez e sentido determinados por ω. Assim, $x(t)$ é obviamente periódico, o que pode ser facilmente constado de forma analítica:

$$x(t) = x(t+T) \quad \Leftrightarrow \quad e^{j\omega t} = e^{j\omega t} e^{j\omega T}\,.$$

Esta igualdade é verificada para qualquer t desde que

$$e^{j\omega T} = 1\,,$$

o que é verificado por qualquer T tal que $\omega T = 2k\pi$, com k inteiro. O período fundamental é então $T_0 = 2\pi/|\omega|$, para $\omega \neq 0$ (se $\omega = 0$, $x(t) = 1$, que, como discutido acima, é periódico com qualquer período). Embora os sinais $e^{j\omega t}$ e $e^{-j\omega t}$ sejam distintos, têm o mesmo período fundamental. Este aspecto fica também claro se usarmos a fórmula de Euler para expressar as partes real e imaginária da exponencial complexa, *i.e.*, se escrevermos

$$x(t) = e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)\,.$$

Vemos que as partes real e imaginária de $x(t)$ são simplesmente sinais sinusoidais e que o sinal $e^{-j\omega t}$ é o sinal complexo conjugado de $e^{j\omega t}$. Um exemplo de sinal exponencial complexo desta classe está representado na Figura 12.

Ao longo do curso vamos ter interesse em escrever diversos sinais como combinações lineares de exponenciais complexas. Como exemplo desse tipo de decomposição, reparemos que a sinusóide, um sinal real, se escreve imediatamente nessa forma:

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}e^{j\omega t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega t}\,, \qquad \sin(\omega t) = \frac{1}{2j}e^{j\omega t} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega t}\,.$$

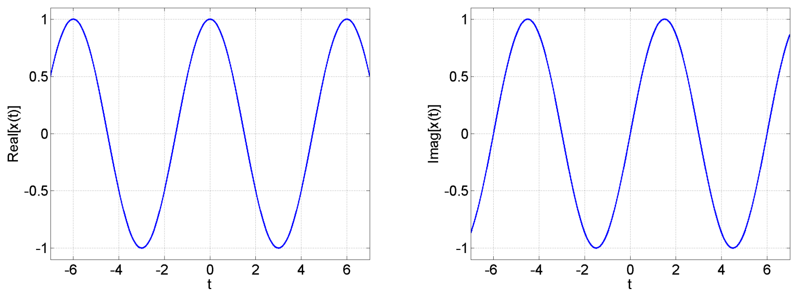

Figura 12: O sinal exponencial complexo $x(t) = e^{j\pi t/3}$. No lado esquerdo, o gráfico da parte real de $x(t)$. No lado direito, o da parte imaginária.

A exponencial complexa, no caso geral é e^{st}, em que $s = \sigma + j\omega$ é complexo. Este sinal pode ser escrito como o produto dos dois casos que acabamos de referir:

$$x(t) = e^{st} = e^{(\sigma+j\omega)t} = e^{\sigma t}e^{j\omega t}\,.$$

Pode-se então concluir que o módulo do sinal é uma exponencial real, $|x(t)| = e^{\sigma t}$, e o seu argumento é o mesmo que o do caso visto anteriormente, $\arg x(t) = \omega t$. Finalmente, podemos explicitar as partes real e imaginária do sinal,

$$x(t) = e^{st} = e^{(\sigma+j\omega)t} = e^{\sigma t}\cos(\omega t) + je^{\sigma t}\sin(\omega t)\,,$$

mostrando que ambas são dadas pelo produto de uma sinusóide por uma exponencial real. A Figura 13 mostra um exemplo de sinal exponencial complexo.

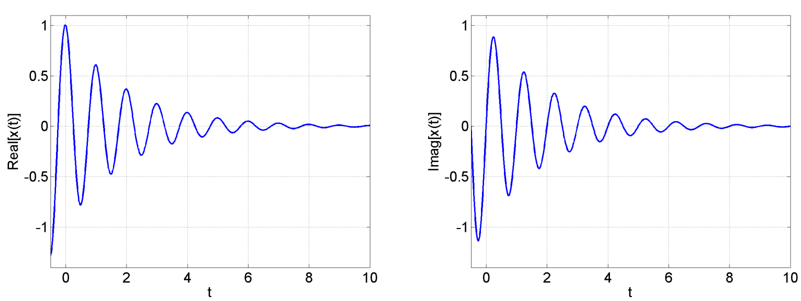

Figura 13: O sinal exponencial complexo $x(t) = e^{(-\frac{1}{2}+j2\pi)t}$. No lado esquerdo, o gráfico da parte real de $x(t)$. No lado direito, o da parte imaginária.

6 Sinal exponencial de tempo discreto

O sinal exponencial complexo de tempo discreto costuma ser escrito de forma diferente, embora equivalente, do de tempo contínuo:

$$x(n) = z^n\,,$$

onde, em geral, $z \in \mathbb{C}$. No caso em que a base é real, $z = r \in \mathbb{R}$, o sinal $x(n)$ é naturalmente a exponencial real

$$x(n) = r^n\,.$$

Se $r > 1$, $x(n)$ é crescente; se $0 < r < 1$, $x(n)$ é decrescente; se $r = 1$, $x(n) = 1$. Para r negativo, $x(n)$ é alternante entre valores positivos e negativos: se $-1 < r < 0$, $|x(n)|$ é decrescente; se $r < -1$, $|x(n)|$ é crescente; se $r = -1$, $x(n)$ alterna entre -1 e 1. A Figura 14 ilustra estes casos.

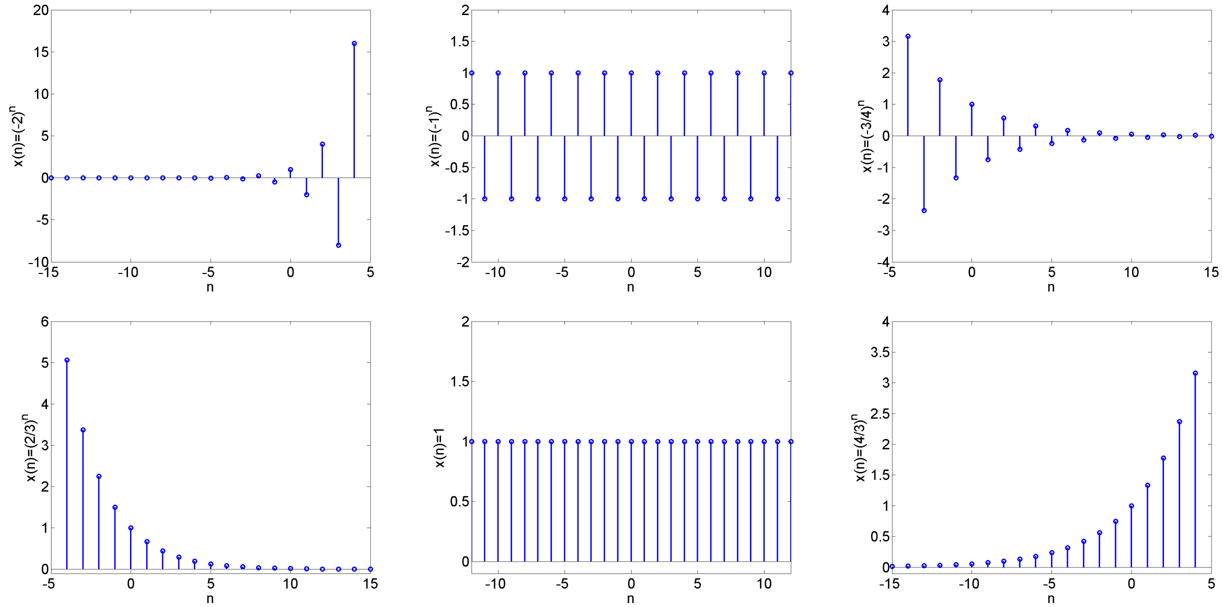

Figura 14: O sinal exponencial real $x(n) = r^n$ para $r = -2, -1, -3/4, 2/3, 1, 4/3$.

Quando a base da exponencial é um complexo de módulo unitário, $z = e^{j\omega}$, o sinal $x(n)$ coincide com as amostras do sinal detalhadamente discutido acima para tempo contínuo e ilustrado na Figura 12, *i.e.*,

$$x(n) = z^n = e^{j\omega n} .$$

Atendendo a essa discussão e ao que se disse a respeito da sinusóide de tempo discreto, facilmente se percebe o comportamento de $x(n)$. Em suma, temos sinais diferentes para diferentes valores de ω num intervalo de dimensão 2π (uma vez que $e^{j(\omega+2\pi)n} = e^{j\omega n}$) e $x(n)$ é periódico apenas quando ω/π é racional, tendo nesse caso o período fundamental dado pelo menor múltiplo inteiro de $2\pi/\omega$. Note-se ainda que para $\omega = 0$ se obtém $x(n) = 1$ e para $\omega = \pi$ se obtém $x(n) = (-1)^n$, os únicos sinais periódicos que aparecem na Figura 14.

Finalmente, quando a base é um complexo arbitrário, o sinal exponencial complexo de tempo discreto pode ser escrito usando a forma polar $z = \rho e^{j\omega}$:

$$x(n) = z^n = \rho^n e^{j\omega n} .$$

Desta forma fica claro que o sinal complexo $x(n)$ é o produto da exponencial real ρ^n pela exponencial complexa com base de módulo unitário $e^{j\omega n}$, sinais discutidos acima. A Figura 15 mostra um exemplo de sinal exponencial complexo de tempo discreto de base genérica.

7 Impulso e degrau unitários de tempo discreto

Um dos mais simples sinais de tempo discreto é o *impulso unitário* $\delta(n)$, que difere do sinal nulo apenas por tomar o valor 1 para $n = 0$, como representado na parte esquerda da Figura 16 e definido por:

$$\delta(n) = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 . \end{cases}$$

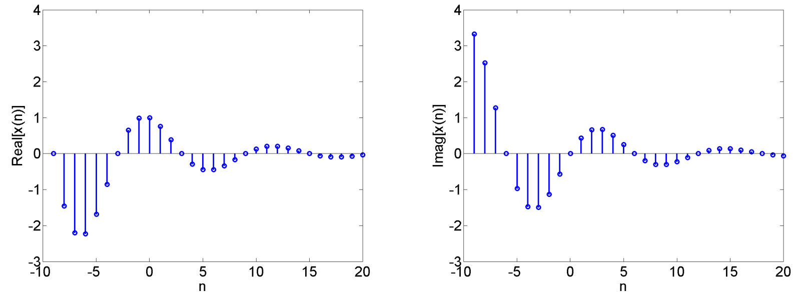

Figura 15: Gráficos das partes real e imaginária do sinal exponencial complexo de tempo discreto $x(n) = z^n$, com $z = 7\sqrt{3}/16 + (7/16)j = (7/8)e^{j\pi/6}$.

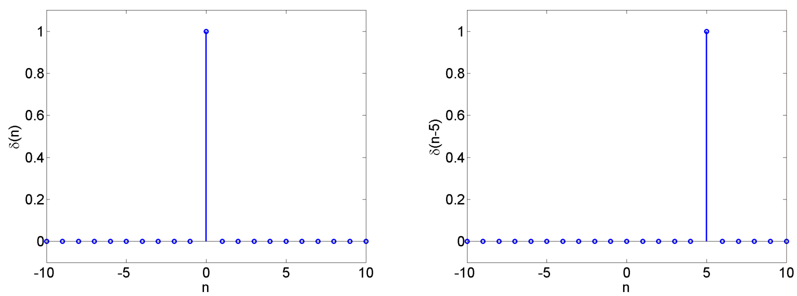

Figura 16: Impulso unitário $\delta(n)$ e um exemplo de impulso unitário atrasado $\delta(n-5)$.

O impulso unitário $\delta(n)$ pode ser usado para amostrar qualquer sinal $x(n)$ no instante $n = 0$, *i.e.*, para obter a amostra $x(0)$. De facto, o sinal produto $x(n)\delta(n)$ é nulo para $n \neq 0$ e toma o valor $x(0)$ para $n = 0$, ou seja,

$$x(n)\delta(n) = x(0)\delta(n)\,.$$

É então fácil constatar que a soma dos valores deste sinal produto é a referida amostra:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\delta(n) = x(0)\,.$$

Naturalmente, este processo pode ser generalizado: qualquer amostra $x(n_0)$ é obtida se usarmos um sinal que é nulo excepto para $n = n_0$, ou seja, se usarmos um impulso adequadamente deslocado no tempo, $\delta(n - n_0)$ (um exemplo está representado na parte direita da Figura 16). Temos então:

$$x(n)\delta(n-n_0) = x(n_0)\delta(n-n_0)\,, \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\delta(n-n_0) = x(n_0)\,.$$

O *degrau unitário* de tempo discreto, ilustrado na Figura 17, é definido por

$$u(n) = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0\,. \end{cases}$$

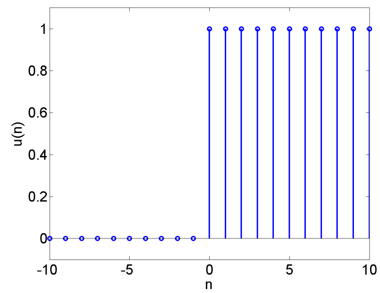

Figura 17: Degrau unitário $u(n)$.

Os sinais $\delta(n)$ e $u(n)$ são facilmente relacionados já que $\delta(n)$ é a *primeira diferença* (o equivalente discreto da derivada) de $u(n)$:

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1)\,.$$

É então natural que se possa também obter $u(n)$ a partir do equivalente discreto da primitiva de $\delta(n)$. De facto, essa relação é dada pela soma seguinte, como se pode verificar facilmente usando as definições de $\delta(n)$ e $u(n)$:

$$u(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta(m)\,.$$

Por vezes, teremos interesse em decompor um sinal arbitrário numa combinação linear de impulsos deslocados no tempo (*i.e.*, numa soma ponderada de sinais como os ilustrados na Figura 16). No caso do sinal $u(n)$, esta decomposição salta aos olhos com a observação das Figuras 16 e 17, sendo simplesmente $u(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \cdots$, ou seja

$$u(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(n-k)\,.$$

(note também que esta decomposição é imediatamente obtida da relação anteriormente estabelecida, $u(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta(m)$, através da mudança de variável do somatório de m para $k = n - m$.)

8 Impulso e degrau unitários de tempo contínuo

O *degrau unitário* de tempo contínuo $u(t)$, ilustrado na parte esquerda da Figura 18, é dado por

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0\,. \end{cases}$$

O *impulso unitário* de tempo contínuo $\delta(t)$ é um sinal que tem as propriedades de amostragem e relação com $u(t)$ semelhantes às referidas para o impulso de tempo discreto. Assim, $\delta(t)$ é a derivada de $u(t)$:

$$\delta(t) = \frac{d\,u(t)}{dt} = u'(t)\,.$$

Obviamente, isto levanta uma dificuldade formal, uma vez que $u(t)$ tem uma descontinuidade, não sendo diferenciável na origem. O formalismo das *funções generalizadas*, que permite lidar com estas derivadas de forma rigorosa, está fora do âmbito da disciplina. Contudo, para os casos estudados na disciplina e para a vasta maioria dos problemas de engenharia, a expressão acima pode ser interpretada da forma que se

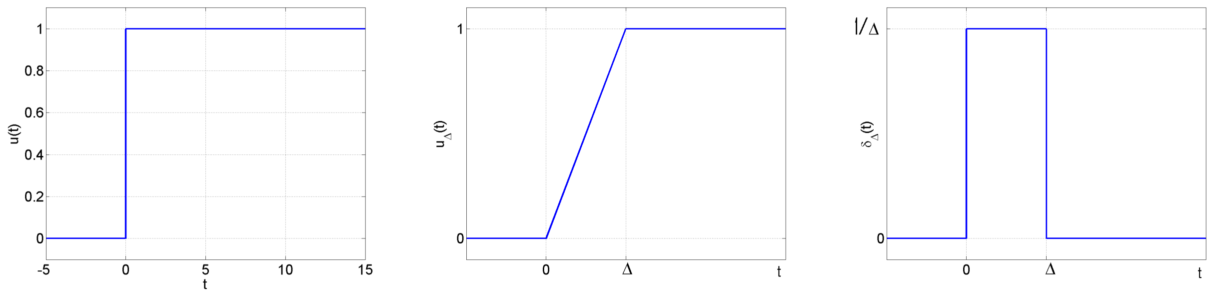

Figura 18: Degrau unitário $u(t)$, a sua aproximação contínua $u_\Delta(t)$ e a respectiva derivada $\delta_\Delta(t)$.

descreve em seguida.

Consideremos uma aproximação contínua do degrau, $u_\Delta(t)$, em que a transição de 0 para 1 não é instantânea mas gradual, ao longo de um intervalo de duração Δ, como ilustrado na parte central da Figura 18. Podemos pensar em $u(t)$ como o limite de uma sucessão de sinais $u_\Delta(t)$, quando a duração do intervalo de transição Δ tende para zero:

$$u(t) = \lim_{\Delta \to 0} u_\Delta(t)\,.$$

Consideremos agora a derivada da aproximação contínua do degrau,

$$\delta_\Delta(t) = u'_\Delta(t)\,,$$

que é nula para $t < 0$ ou $t > \Delta$ e tem valor $1/\Delta$ (o declive da transiçao em $u_\Delta(t)$) para $0 < t < \Delta$. O sinal $\delta_\Delta(t)$ tem então a forma de um impulso de duração Δ e altura $1/\Delta$, conforme representado na parte direita da Figura 18. Naturalmente, vamos interpretar o impulso unitário $\delta(t)$ como o limite da sucessão de funções $\delta_\Delta(t)$ quando Δ tende para zero:

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t)\,.$$

Assim, o impulso unitário de tempo contínuo $\delta(t)$ é um impulso de duração infinitesimal e altura infinita. Como, independentemente do valor de Δ, a área delimitada pelo gráfio de $\delta_\Delta(t)$ é unitária, o mesmo acontece com a área de $\delta(t)$. Habitualmente, um impulso é representado por uma seta vertical em conjunto com um número que indica a sua área, como ilustrado na Figura 19 para $\delta(t)$.

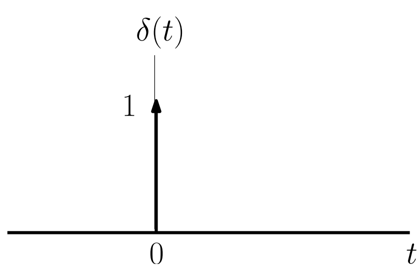

Figura 19: Impulso unitário de tempo contínuo, $\delta(t)$.

Naturalmente, $\delta(t)$ é um sinal que tem $u(t)$ como primitiva. Em particular, é fácil constatar que

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau\,,$$

uma vez que, para $t < 0$, a função integranda é nula e, para $t > 0$, o integral acima representa a área unitária do impulso.

Usando esta interpretação, podemos agora constatar que o impulso unitário de tempo contínuo tem a propriedade de amostragem derivada de forma trivial para o caso do tempo discreto. De facto, o sinal $x(t)\delta(t)$ pode ser pensado como o limite da sucessão de sinais $x(t)\delta_\Delta(t)$ quando $\Delta \to 0$. Como

$$x(t)\delta_\Delta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ x(t)/\Delta & 0 < t < \Delta \\ 0 & t > \Delta\,, \end{cases}$$

quando $\Delta \to 0$, o sinal $x(t)\delta_\Delta(t)$ tende para um impulso, cuja área (o valor para que tende a área de $x(t)\delta_\Delta(t)$) é $\Delta \times x(0)/\Delta = x(0)$. Assim, podemos escrever

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)\,,$$

e, integrando este sinal, obtem-se a sua área, *i.e.*, o valor da amostra pretendida:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)\,dt = x(0)\,.$$

Naturalmente, estas expressões são generalizadas quando usamos um impulso deslocado no tempo:

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)\,, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0)\,dt = x(t_0)\,.$$

A Figura 20 ilustra a amostragem de um sinal por um impulso deslocado no tempo.

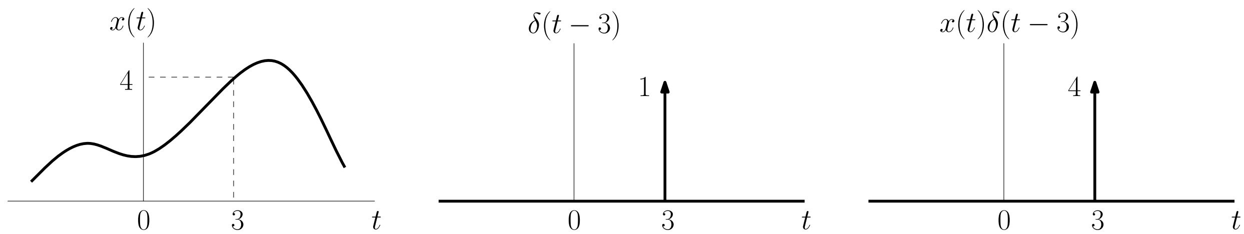

Figura 20: Sinal $x(t)$, impulso $\delta(t-3)$ e produto $x(t)\delta(t-3) = x(3)\delta(t-3) = 4\delta(t-3)$.

Por fim, refira-se que, tal como vimos para o tempo discreto, o degrau de tempo contínuo $u(t)$ também se pode escrever como sobreposição de impulsos:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau = \int_{+\infty}^{0} \delta(t-\sigma)\frac{d\tau}{d\sigma}\,d\sigma = \int_{+\infty}^{0} \delta(t-\sigma)(-1)\,d\sigma = \int_{0}^{+\infty} \delta(t-\sigma)\,d\sigma\,,$$

onde se fez a mudança de variável $\tau = t - \sigma$. Naturalmente, tendo os impulsos uma duração infinitesimal, é necessário sobrepôr a infinidade não enumerável de todos os impulsos localizados em instantes de tempo positivos, como mostra a expressão acima obtida.

A utilização do impulso unitário de tempo contínuo permite-nos trabalhar com derivadas de funções descontínuas. Para clarificar este ponto, determinemos a derivada de uma função $f(t)$ descontínua em t_0 (e contínua em todos os outros pontos), *i.e.*, uma função

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) & t < t_0 \\ f_2(t) & t > t_0\,, \end{cases}$$

onde $f_1(t)$ e $f_2(t)$ são funções contínuas. Repare-se que $f(t)$ pode ser convenientemente escrita em termos do degrau unitário:

$$f(t) = f_1(t)u(t_0 - t) + f_2(t)u(t - t_0)\,.$$

Assim, podemos derivar $f(t)$ partindo desta expressão e usando as regras habituais de derivação, juntamente com o conhecimento de que a derivada de $u(t)$ é $\delta(t)$:

$$\begin{aligned}
f'(t) &= f_1'(t)u(t_0-t) + f_1(t)\frac{du(t_0-t)}{dt} + f_2'(t)u(t-t_0) + f_2(t)\frac{du(t-t_0)}{dt} \\
&= f_1'(t)u(t_0-t) + f_1(t)(-1)u'(t_0-t) + f_2'(t)u(t-t_0) + f_2(t)u'(t-t_0) \\
&= f_1'(t)u(t_0-t) - f_1(t)\delta(t_0-t) + f_2'(t)u(t-t_0) + f_2(t)\delta(t-t_0) \\
&= f_1'(t)u(t_0-t) - f_1(t)\delta(t-t_0) + f_2'(t)u(t-t_0) + f_2(t)\delta(t-t_0) \qquad (1) \\
&= f_1'(t)u(t_0-t) + f_2'(t)u(t-t_0) + \left[f_2(t_0) - f_1(t_0)\right]\delta(t-t_0)\,,
\end{aligned}$$

onde, na igualdade (1), se usou o facto de que $\delta(t)$ é par. O resultado acima obtido faz sentido: a derivada de $f(t)$ coincide com a derivada de $f_1(t)$ para $t < t_0$, com a derivada de $f_2(t)$ para $t > t_0$, e tem um impulso, localizado em $t = t_0$, com área dada pelo valor da descontinuidate, $f_2(t_0) - f_1(t_0)$.